1ère ES Notre Dame de La Merci - Montpellier

Contrôle de Mathématiques – Probabilités

Le surréalisme est la volonté de faire advenir le possible au détriment du probable. ***André Breton***

<u>Exercice 1 :</u> *(4 pts)*

On considère un dé truqué à 10 faces comportant les chiffres de 1 à 9 et une étoile sur la 10ème face.

La probabilité d'obtenir un nombre pair est égale à $\frac{1}{8}$.

La probabilité d'obtenir un nombre impair est égale à $\frac{1}{12}$.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir la face « étoile » ?
2) Quelle devrait être la valeur de la face « étoile » pour que ce jeu soit équitable ?

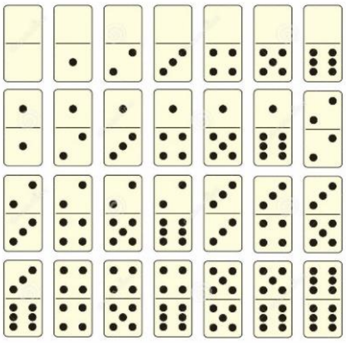
<u>Exercice 2 :</u> *(4 pts)*

Un jeu de hasard est organisé comme suit.
Dans une urne blanche se trouvent 20 boules équilibrées composées de 6 boules oranges et 14 bleues.
Un joueur mise 5 € et tire deux boules **<u>sans remise</u>** :

- s'il obtient deux boules oranges, il gagne 20 €,
- s'il obtient une boule orange, il gagne 5 €,
- s'il n'obtient aucune boule orange, il ne gagne rien.

1) Ce jeu est-il équitable ?
2) Quelle devrait être la mise pour que l'organisateur gagne en moyenne 1 € par partie (arrondir au centime) ?

<u>Exercice 3 :</u> *(8 pts)*



Dans un jeu de domino, toutes les pièces sont différentes et uniques.

Partie A :

1) Quelle est la probabilité de tirer un double ? Justifier.
2) Quelle est la probabilité de tirer un domino comportant au moins un 4 ? Justifier.
3) En vous aidant d'un arbre, quelle est la probabilité de tirer (SANS REMISE) un double 5 puis un domino comportant au moins un 6 ?

Partie B :

Le jeu consiste à tirer SANS REMISE deux dominos et à compter le nombre de 6 obtenus (le double 6 rapporte deux 6). Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de 6.
En vous aidant d'un arbre, donner la loi de probabilité de X puis l'espérance de ce jeu.

<u>Exercice 4 :</u> *(5 pts)*

Un joueur de bowling a le droit de lancer successivement 2 boules sur 10 quilles. Au premier lancer, il a une probabilité de 5% de ne toucher aucune quille. Il a une probabilité de 20% de toucher toutes les quilles d'un coup. La probabilité qu'il touche entre 1 et 5 quilles vaut 25%. Si le joueur n'a touché aucune quille lors du premier lancé, la qualité du 2eme lancé sera identique à celle du premier. En outre, le 2eme lancé fera tomber l'ensemble des quilles non touchées au premier lancé avec une probabilité de 30% s'il ne reste pas plus de 4 quilles. Par contre, s'il reste entre 5 et 9 quilles après le 1er lancé, il fera tomber l'ensemble des quilles restantes avec une probabilité de 15%.

a) Quelle est la probabilité qu'il touche entre 6 et 9 quilles au 1er lancé ?
b) Quelle est la probabilité d'avoir fait tomber toutes les quilles en un ou deux lancers ?
c) Quelle est la probabilité de n'avoir touché aucune quille après les 2 lancés ?

CORRIGE - Notre Dame de La Merci - Montpellier

Exercice 1 :
(4 pts)

On considère un dé truqué à 10 faces comportant les chiffres de 1 à 9 et une étoile sur la 10ème face.

La probabilité d'obtenir un nombre pair est égale à $\frac{1}{8}$.

La probabilité d'obtenir un nombre impair est égale à $\frac{1}{12}$.

3) *Quelle est la probabilité d'obtenir la face « étoile » ?*

Loi de probabilité :

Face	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*	Total
P(Face)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	x	1

La somme des probabilités doit être égale à 1 donc :

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+x=1 \Leftrightarrow \frac{5}{12}+\frac{4}{8}+x=1$$

$$\Leftrightarrow x=1-\frac{5}{12}-\frac{1}{2}=\frac{12}{12}-\frac{5}{12}-\frac{6}{12}=\frac{1}{12}$$

4) *Quelle devrait être la valeur de la face « étoile » pour que ce jeu soit équitable ?*

Loi de probabilité :

Face	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x	Total
P(Face)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

L'espérance d'un jeu équitable est nulle, donc :

$$\frac{1}{12}\times1+\frac{1}{8}\times2+\frac{1}{12}\times3+\frac{1}{8}\times4+\frac{1}{12}\times5+\frac{1}{8}\times6+\frac{1}{12}\times7+\frac{1}{8}\times8+\frac{1}{12}\times9+\frac{1}{12}\times x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12}+\frac{2}{8}+\frac{3}{12}+\frac{4}{8}+\frac{5}{12}+\frac{6}{8}+\frac{7}{12}+\frac{8}{8}+\frac{9}{12}+\frac{1}{12}\times x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{12}+\frac{20}{8}+\frac{1}{12}x=0 \Leftrightarrow \frac{1}{12}x=-\frac{25}{12}-\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=\left(-\frac{25}{12}-\frac{5}{2}\right)\times12 \Leftrightarrow x=-25-30=-55$$

Exercice 2 :
(4 pts)

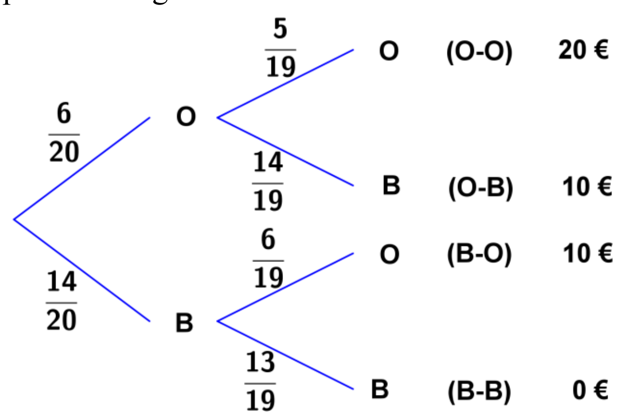
Un jeu de hasard est organisé comme suit. Dans une urne blanche se trouvent 20 boules équilibrées composées de 6 boules oranges et 14 violettes. Un joueur mise 5 € et tire deux boules ***sans remise*** *:*

- *s'il obtient deux boules oranges, il gagne 20 €,*
- *s'il obtient une boule orange, il gagne 5 €,*
- *s'il n'obtient aucune boule orange, il ne gagne rien.*

3) *Ce jeu est-il équitable ?*

Soit O l'évènement : « la boule obtenue est orange », et B l'évènement « la boule obtenue est bleue »

On obtient l'arbre suivant pour un tirage sans remise :



La probabilité d'obtenir deux boules oranges est : $p(\mathrm{O}-\mathrm{O})=\frac{6}{20}\times\frac{5}{19}=\frac{30}{380}=\frac{15}{190}$

La probabilité d'obtenir une boule orange est : $p(\mathrm{O}-\mathrm{B})+p(\mathrm{B}-\mathrm{O})=\frac{6}{20}\times\frac{14}{19}+\frac{14}{20}\times\frac{6}{19}=\frac{168}{380}=\frac{84}{190}$

La probabilité de n'obtenir aucune boule orange est : $p(\mathrm{B}-\mathrm{B})=\frac{14}{20}\times\frac{13}{19}=\frac{182}{380}=\frac{91}{190}$.

Soit G la variable aléatoire qui détermine le gain du joueur, G peut prendre les valeurs -5, 0, 15.

La loi de probabilité de G est :

G	-5	0	15	Total
$p(\mathrm{G})$	$\frac{91}{190}$	$\frac{84}{190}$	$\frac{15}{190}$	$\frac{190}{190}$

L'espérance de G est :

$$p(\mathrm{G})=-5\times\frac{91}{190}+0\times\frac{84}{190}+15\times\frac{15}{190}=-\frac{455}{190}+\frac{225}{190}=-\frac{230}{190}\simeq-1,21\,€.$$

→l'organisateur gagne en moyenne 1,21 € par partie

4) *Quelle devrait être la mise pour que l'organisateur gagne en moyenne 1 € par partie (arrondir au centime) ?*

On souhaite que l'espérance de G soit égale à : $p(\mathrm{G})=-1\,€$.

Soit x la mise du joueur, la loi de probabilité devient :

G	$0-x$	$5-x$	$20-x$	Total
$p(\mathrm{G})$	$\frac{91}{190}$	$\frac{84}{190}$	$\frac{15}{190}$	$\frac{190}{190}$

L'espérance de G donne :

$$p(\mathrm{G})=(-x)\times\frac{91}{190}+(5-x)\times\frac{84}{190}+(20-x)\times\frac{15}{190}=-1$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{91}{190}x+\frac{42}{19}-\frac{84}{190}x+\frac{30}{19}-\frac{15}{190}x=-1$$

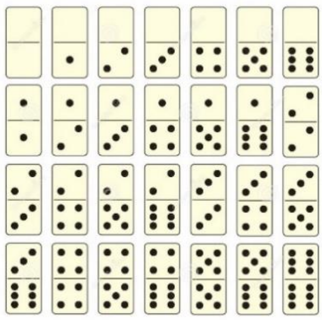
$$\Leftrightarrow\ -\frac{190}{190}x+\frac{72}{19}=-1\ \Leftrightarrow\ -x=-1-\frac{72}{19}\ \Leftrightarrow\ -x=-\frac{91}{19}\ \Leftrightarrow\ x=\frac{91}{19}\simeq4,79\,€$$

La mise devrait être de 4,79 €.

AUTRE METHODE :

→Avec une mise de 5 €, l'organisateur gagne 1,21 € par partie, il faudrait baisser la mise de 0,21 €.

Exercice 3 : *(8 pts)*



Dans un jeu de domino, toutes les pièces sont différentes et uniques.

Partie A :

4) *Quelle est la probabilité de tirer un double ?*

$$p(\text{double})=\frac{\text{nombre de doubles}}{\text{nombre de dominos}}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$$

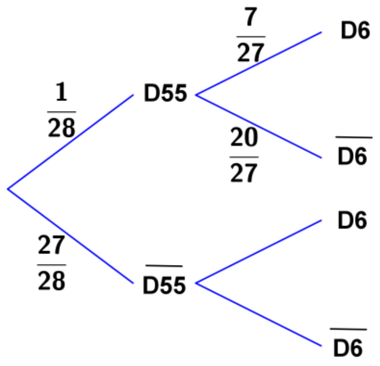
5) *Quelle est la probabilité de tirer un domino comportant au moins un 4 ?*

$$p(\text{obtenir un }4)=\frac{\text{nombre de dominos ayant un }4}{\text{nombre de dominos}}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$$

6) *Quelle est la probabilité de tirer un double 5 puis un domino comportant au moins un 6 ?*

Soit D55 l'évènement « obtenir un double 5 » et D6 l'évènement « obtenir un 6 ».

On obtient l'arbre suivant :

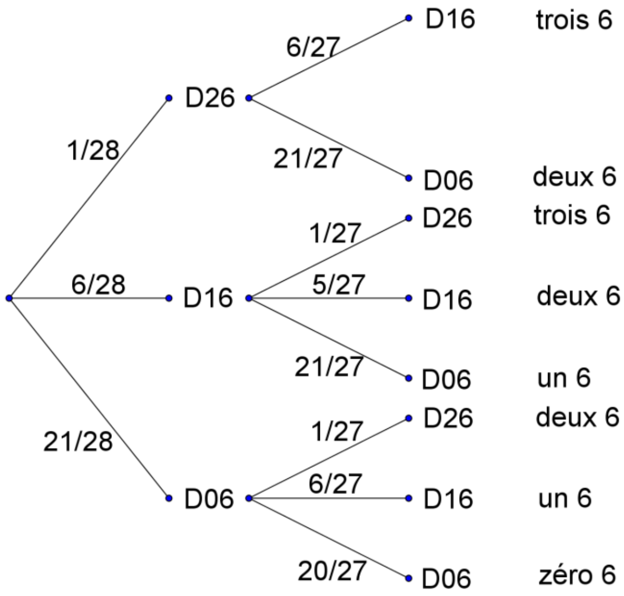


$$p(\text{D55}\cap\text{D6})=\frac{1}{28}\times\frac{7}{27}=\frac{\boxed{7}}{\boxed{7}\times4\times27}=\frac{1}{108}.$$

Partie B

Le jeu consiste à tirer deux dominos et à compter le nombre de 6 présents sur les deux dominos.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de 6.
Donner la loi de probabilité de X puis l'espérance de ce jeu.

X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3. D'où la nécessité de faire un arbre pour calculer chaque probabilité.
On définit les évènements D06, D16 et D26 les évènements donnant le nombre de 6 après chaque tirage :



Deux chemins mènent à la probabilité d'avoir trois 6 : $\frac{1}{28}\times\frac{6}{27}+\frac{6}{28}\times\frac{1}{27}=\frac{12}{756}$

Trois chemins mènent à la probabilité d'avoir deux 6 : $\frac{1}{28}\times\frac{21}{27}+\frac{6}{28}\times\frac{5}{27}+\frac{21}{28}\times\frac{1}{27}=\frac{72}{756}$

Deux chemins mènent à la probabilité d'avoir un 6 : $\frac{6}{28}\times\frac{21}{27}+\frac{21}{28}\times\frac{6}{27}=\frac{252}{756}$

Un chemin mène à la probabilité d'avoir zéro 6 : $\frac{21}{28}\times\frac{20}{27}=\frac{420}{756}$.

Loi de probabilité de X :

X	0	1	2	3	Total
$p(\text{X})$	$\frac{420}{756}$	$\frac{252}{756}$	$\frac{72}{756}$	$\frac{12}{756}$	$\frac{756}{756}$

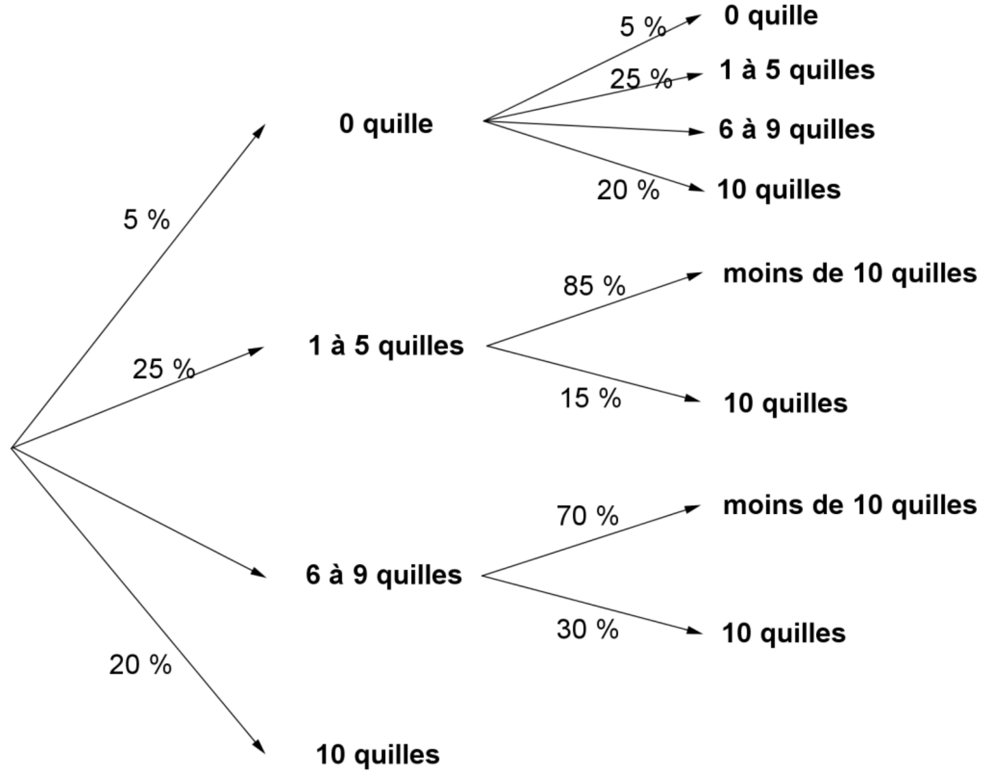
L'espérance de X est :

$$p(\text{X})=0\times\frac{420}{756}+1\times\frac{252}{756}+2\times\frac{72}{756}+3\times\frac{12}{756}=\frac{252}{756}+\frac{144}{756}+\frac{36}{756}=\frac{432}{756}\simeq 0,57$$

Exercice 4 : *(5 pts)*

Un joueur de bowling a le droit de lancer successivement 2 boules sur 10 quilles. Au premier lancer, il a une probabilité de 5% de ne toucher aucune quille. Il a une probabilité de 20% de toucher toutes les quilles d'un coup. La probabilité qu'il touche entre 1 et 5 quilles vaut 25%. Si le joueur n'a touché aucune quille lors du premier lancé, la qualité du 2eme lancé sera identique à celle du premier. En outre, le 2eme lancé fera tomber l'ensemble des quilles non touchées au premier lancé avec une probabilité de 30% s'il ne reste pas plus de 4 quilles. Par contre, s'il reste entre 5 et 9 quilles après le 1er lancé, il fera tomber l'ensemble des quilles restantes avec une probabilité de 15%.

Voici ce que dit l'énoncé :



c) *Quelle est la probabilité qu'il touche entre 6 et 9 quilles au 1er lancé ?*

La somme des probabilités est égale à 1, donc :

$$p(6 \text{ à } 9 \text{ quilles}) = 100\% - 5\% - 25\% - 20\% = 50\%$$

d)Quelle est la probabilité d'avoir fait tomber toutes les quilles en un ou deux lancers *?*

Quatre chemins mènent à la chute de 10 quilles :

$$p(10 \text{ quilles}) = 5\% \times 20\% + 25\% \times 15\% + 50\% \times 30\% + 20\%$$

$$p(10 \text{ quilles}) = 0,05 \times 0,2 + 0,25 \times 0,15 + 0,5 \times 0,3 + 0,20 = 0,3975$$

d) Quelle est la probabilité de n'avoir touché aucune quille après les 2 lancés ?

Un chemin mène à la chute de 0 quille :

$$p(0 \text{ quille}) = 5\% \times 5\% = 0,05 \times 0,05 = 0,0025 = 0,25\%$$