Exercices sur le raisonnement par récurrence – M. Schmutz

Exercice 1 : Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 \in [0;1]$ et $v_{n+1} = \sqrt{\frac{1+v_n}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Prouver par récurrence la propriété $\mathrm{P}_n : 0 \leq v_n \leq 1$

b) Prouver que (v_n) est croissante.

c) On pose $v_0 = \cos \Psi$ avec $\Psi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, montrer par récurrence que $v_n = \cos\left(\frac{\Psi}{2^n}\right)$

Exercice 2 : Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 2$ est un nombre pair.

Exercice 3 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$

a) Calculer les premiers termes de la suite.
b) Conjecturer une expression pour le terme général u_n
c) Prouver cette conjecture par récurrence.

Exercice 4 : Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 5 : Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 6 : Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 6$, $2^n \geq (n+2)^2$

Exercice 7 :
Démontrer par récurrence que la suite définie par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est décroissante.

Exercice 8 : Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$

1. Etudier la monotonie de (v_n)
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n > n^2$

Exercice 9 : Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = \frac{2}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n(2 - v_n)$

Montrer que (v_n) est minorée par 0 et majorée par 1.

Exercice 10 : Soit la suite (S_n) définie par : $\forall\, n \geq 1$: $\mathrm{S}_n = 1+3+5+...+(2n-1)$

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite et conjecturer une expression de (S_n) en fonction de *n*.
2. Démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 11 : Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = 13$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{4v_n - 3}$

1. On admet que la fonction $f : x \mapsto 4x - 3$ est croissante sur son ensemble de définition $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$.

   Tracer avec précision la courbe représentative de f *(unité : 1 cm en abscisse, 3 cm en ordonnée)*, puis, à l'aide de la droite $y = x$, placer les 4 premiers points de la suite.
2. Conjecturer le sens de variation de la suite (v_n), ainsi qu'un minorant et un majorant de cette suite.
3. Démontre les conjectures précédentes par deux récurrences distinctes.

Exercice 12 : Reprendre les trois questions de l'exercice 11 avec :

Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = \frac{7}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{4v_n - 3}$

Exercice 13 : Démontrer que : $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$

Exercice 14 : On donne une suite définie par : $u_0 = 13$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

Exercice 15 : Montrer par récurrence que $\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Exercice 16 : Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$

Exercice 17 : On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n + n + 1$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}$

Exercice 18 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 1$

Après avoir calculé les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur l'expression de (u_n) puis la démontrer par récurrence.

Exercice 19 : Montrer par récurrence que, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a-b)\sum_{p=0}^{n-1} a^{(n-1-p)} b^p$

Exercice 20 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$

Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$

Exercice 21 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_2 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n$

Démontrer que, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_2 = u_1 = 1$ et $u_n = (-2)^n - 3(-1)^n$

Exercice 22 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = u_0 = 1$ et $\forall\, n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

Cette suite est appelée suite de FIBONACCI.

On pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: ce nombre est appelé le nombre d'or.

1) Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$
2) En déduire alors une expression de φ^3, φ^4 et φ^5 de la forme $a\varphi + b$, avec *a* et *b* deux entiers.
3) Déduire des deux questions précédentes une expression de φ^n sous la forme $a\varphi + b$
4) Démontrer alors cette conjecture avec un entier naturel quelconque *n*.

Aide : Calculer les premiers termes de la suite de FIBONACCI puis ouvrir les yeux…

Exercice 23 : On considère la proposition suivante : P_n : 9 divise $10n+1$

1) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.
2) Qu'en est-il de P_0, P_1, P_2 et P_3 ? Que semble-t-il légitime de conjecturer ?
3) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, Q_n : 9 divise $10n-1$
4) A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est fausse.

Exercice 24 : Montrer, pour tout entier naturel *n*, que :

1) $2^{n+4}+3^{3n+2}$ est divisible par 5.
2) $3^{6n+2}-2$ est divisible par 7

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. QUET

Exercice 1 :

Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 \in [0;1]$ et $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+v_n}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Prouver par récurrence la propriété $P_n : 0 \le v_n \le 1$

Initialisation : $v_0 \in [0;1]$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que : $0 \le v_n \le 1$

→ceci implique-t-il que $0 \le v_{n+1} \le 1$?

$$\begin{aligned} 0 \le v_n \le 1 \quad & \Leftrightarrow 1 \le 1+v_n \le 2 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1+v_n}{2} \le 1 \\ & \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le \sqrt{\frac{1+v_n}{2}} \le 1 \\ & \Leftrightarrow 0 \le v_{n+1} \le 1 \end{aligned}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence : $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+v_n}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

b) Prouver que (v_n) est croissante :

Etudions la différence entre v_n et v_{n+1} :

$$v_{n+1}{}^2 - v_n{}^2 = \frac{1+v_n}{2} - v_n{}^2 = \frac{-2v_n{}^2 + v_n + 1}{2}$$

Etude du numérateur : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 9$

Les racines de ce polynôme sont : $v_{n_1} = \dfrac{-1-3}{2\times(-2)} = 1$ et $v_{n_2} = \dfrac{-1+3}{2\times(-2)} = -\dfrac{1}{2}$

Sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$, la différence étudiée est donc positive

Donc $v_{n+1}{}^2 \ge v_n{}^2$ soit $v_{n+1} \ge v_n$: (v_n) est croissante

c) On pose $v_0 = \cos\Psi$ avec $\Psi \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, montrer par récurrence que $v_n = \cos\left(\dfrac{\Psi}{2^n}\right)$

Initialisation : $v_0 = \cos\Psi = \cos\left(\dfrac{\Psi}{2^0}\right)$ et $v_1 = \sqrt{\dfrac{1+\cos\Psi}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\dfrac{\Psi}{2}\right)} = \cos\left(\dfrac{\Psi}{2^1}\right)$

Hérédité : supposons la propriété vraie à un certain rang n : $v_n = \cos\left(\dfrac{\Psi}{2^n}\right)$

→montrons qu'elle est vraie au rang (n+1) et que nous avons : $v_{n+1} = \cos\left(\dfrac{\Psi}{2^{n+1}}\right)$

$$v_{n+1} = \sqrt{\frac{1+v_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\Psi}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(2\times\frac{\Psi}{2^{n+1}}\right)}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\Psi}{2^{n+1}}\right)} = \cos\left(\frac{\Psi}{2^{n+1}}\right)$$

L'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout n, $v_n = \cos\left(\dfrac{\Psi}{2^n}\right)$

Exercice 2 : Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2+n+2$ est un nombre pair.

Initialisation : Au rang 0 : $0^2+0+2=2$ et 2 est pair

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n : n^2+n+2 est un nombre pair.

→montrons qu'elle est vraie au rang (n+1) et que $(n+1)^2+(n+1)+2$ est un nombre pair.

$$(n+1)^2+(n+1)+2=n^2+2n+1+n+1+2=n^2+3n+4=n^2+n+2+2n+2=\left(n^2+n+2\right)+2(n+1)$$

La 1ère parenthèse est paire par hypothèse, de même pour le facteur 2 intervenant dans le 2è produit
Donc l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2+n+2$ est un nombre pair.

Exercice 3 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_1=1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}$

a) Calculer les premiers termes de la suite :

$$u_2=\frac{u_1}{1+u_1}=\frac{1}{2}\ ;\quad u_3=\frac{u_2}{1+u_2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\ ;\quad u_4=\frac{u_3}{1+u_3}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4}$$

b) Il semble que $u_n=\dfrac{1}{n}$

c) Prouver cette conjecture par récurrence :

L'initialisation est déjà vérifiée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n=\dfrac{1}{n}$

→cela implique-t-il $u_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$?

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{n}\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$: l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, on peut affirmer que pour tout n, $u_n=\dfrac{1}{n}$.

Exercice 4 : Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n+6n-1$ est divisible par 9.

Initialisation : $4^0+6\times 0-1=0$ est bien divisible par 9

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que 4^n+6n-1 est divisible par 9.

→cela implique-t-il $4^{n+1}+6(n+1)-1$ est divisible par 9 ?

$$4^{n+1}+6(n+1)-1=4\times 4^n+6n+5=4\left(4^n+\frac{3}{2}n+\frac{5}{4}\right)=4\left(4^n+\frac{12}{2}n-\frac{9}{2}n-\frac{4}{4}+\frac{9}{4}\right)$$

$$=4\left(4^n+6n-1-\frac{9}{2}n+\frac{9}{4}\right)=4\left(4^n+6n-1\right)-18n+9=4\left(4^n+6n-1\right)-9(2n-1)$$

→l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, on peut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n+6n-1$ est divisible par 9.

Exercice 5 : Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

Initialisation : $\cos^{(1)}(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)$: ok

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

→cela implique-t-il $\cos^{(n+1)}(x)=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$?

$$\cos^{(n+1)}(x)=\left(\cos^{(n)}(x)\right)'=\left(\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)'=-\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

→l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, on peut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 6 : Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 6$, $2^n \geq (n+2)^2$

Initialisation : $2^6=64$ et $(6+2)^2=64$: ok

Hérédité : supposons cette hypothèse vraie à un certain rang $n \geq 6$: $2^n \geq (n+2)^2$

→cela implique-t-il $2^{n+1} \geq ((n+1)+2)^2$?

$$\begin{aligned} 2^n \geq (n+2)^2 &\Leftrightarrow 2\times 2^n \geq 2\times(n+2)^2 \\ &\Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 2\left(n^2+4n+4\right) \\ &\Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 2n^2+8n+8 \end{aligned}$$

Il faut donc comparer $2n^2+8n+8$ et $((n+1)+2)^2$

$$2n^2+8n+8-((n+1)+2)^2=2n^2+8n+8-(n+3)^2=2n^2+8n+8-\left(n^2+6n+9\right)$$
$$=2n^2+8n+8-n^2-6n-9=n^2+2n-1$$

Etude du discriminent : $\Delta=2^2-4\times(-1)=8$

→Les racines de ce polynôme sont : $n_1=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$ et $n_2=\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}=-1+\sqrt{2}$

→Sur l'intervalle $[6;+\infty[$, la différence étudiée est donc positive

Donc $2n^2+8n+8>((n+1)+2)^2$ et $\Leftrightarrow$ $2^{n+1} \geq 2n^2+8n+8>((n+1)+2)^2$

→l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, on peut affirmer que pour tout entier $n \geq 6$, $2^n \geq (n+2)^2$

Exercice 7 :

Démontrer par récurrence que la suite définie par : $u_0=5$ et $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ est décroissante.

Initialisation : $u_1=\sqrt{2+u_0}=\sqrt{2+5}=\sqrt{7}$ donc $u_1 \leq u_0$: ok

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} \leq u_n$

→cela implique-t-il $u_{n+2} \leq u_{n+1}$?

$$u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow 2+u_{n+1} \leq 2+u_n$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2+u_{n+1}} \leq \sqrt{2+u_n}$$
$$\Leftrightarrow u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

→l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, on peut affirmer que cette suite ainsi définie est décroissante.

Exercice 8 : Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$

1. Etudier la monotonie de (v_n) :

   $v_{n+1} - v_n = 2n+3$ or $n \in \mathbb{N}$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$ et la suite (v_n) est croissante.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n > n^2$:

   Initialisation : $v_0 = 1$ donc $v_0 > 0^2$: ok

   Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n > n^2$

   →cela implique-t-il $v_{n+1} > (n+1)^2$?

   $$v_n > n^2 \Leftrightarrow v_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$$
   $$\Leftrightarrow v_n + 2n + 3 > \left(n^2 + 2n + 1\right) + 2$$
   $$\Leftrightarrow v_{n+1} > (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$$

   →l'hérédité est vérifiée

   Par récurrence, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n > n^2$

Exercice 9 : Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = \frac{2}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n(2 - v_n)$

Montrer que (v_n) est minorée par 0 et majorée par 1.

Il faut étudier la fonction $f(x) = x(2-x) = 2x - x^2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$f'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$: ainsi $f'(x) > 0$ si $x < 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		–	
f	0	↗	1	↘	

$f(0) = 0 \times (2-0) = 0$ et $f(1) = 1 \times (2-1) = 1$

Ainsi l'image d'un nombre compris entre 0 et 1 est toujours comprise entre 0 et 1.

Ici $v_0 = \frac{2}{3}$, donc tous les termes suivants de la suite seront compris entre 0 et 1.

Exercice 10 :

Soit la suite (S_n) définie par : $\forall\, n \geq 1$: $S_n = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$

1. $S_1 = 1$; $S_2 = 1+3 = 4$; $S_3 = 1+3+5 = 9$; $S_4 = 1+3+5+7 = 16$

→il semblerait que $\forall\, n \geq 1$: $S_n = n^2$

2. Démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence :
   L'initialisation vient d'être vérifiée.

   Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n = n^2$

   →cela implique-t-il $S_{n+1} = (n+1)^2$?

   $S_{n+1} = 1+3+5+...+(2n-1)+(2(n+1)-1) = 1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1) = n^2+(2n+1)$

   $S_{n+1} = n^2+2n+1 = (n+1)^2$

→l'hérédité est vérifiée

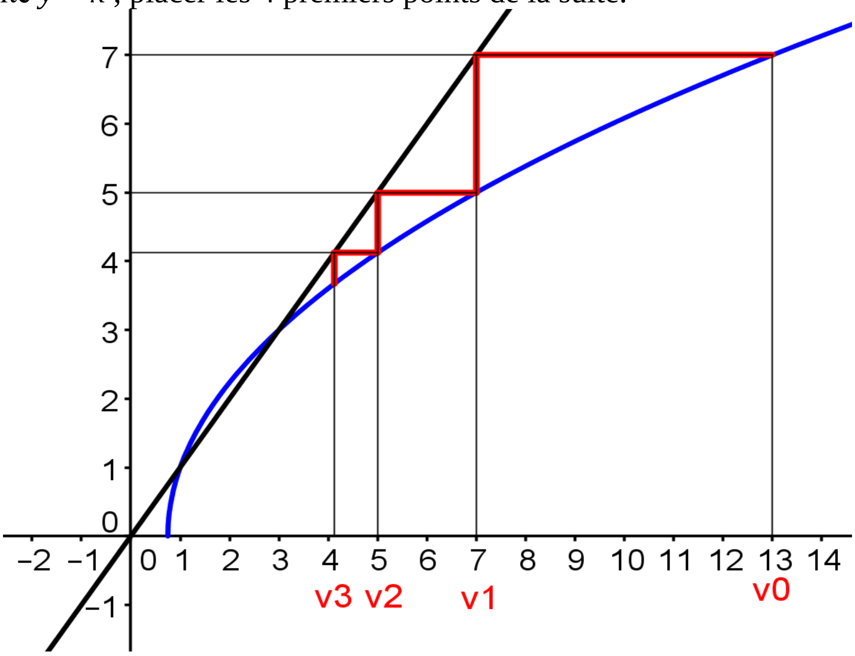
Par récurrence, on peut affirmer que pour tout $n \geq 1$: $S_n = n^2$

Exercice 11 :

Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = 13$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{4v_n - 3}$

1. On admet que la fonction $f : x \mapsto 4x - 3$ est croissante sur son ensemble de définition $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$.

   Tracer avec précision la courbe représentative de f *(unité : 1 cm en abscisse, 3 cm en ordonnée)*, puis, à l'aide de la droite $y = x$, placer les 4 premiers points de la suite.



2. Cette suite (v_n) semble décroissante, elle serait donc majorée par son premier terme $v_0 = 13$ et semble minorée par la valeur 3 qui serait un point de convergence.
3. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, (v_n) est décroissante :

   Initialisation : $v_1 = \sqrt{4v_0 - 3} = \sqrt{4 \times 13 - 3} = \sqrt{49} = 7$ donc $v_1 \leq v_0$: la propriété est initialisée

   Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n+1} \leq v_n$

   →ceci implique-t-il que $v_{n+2} \leq v_{n+1}$?

   $$\begin{aligned} v_{n+1} \leq v_n \quad &\Leftrightarrow \quad 4v_{n+1} \leq 4v_n \\ &\Leftrightarrow \quad 4v_{n+1} - 3 \leq 4v_n - 3 \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{4v_{n+1} - 3} \leq \sqrt{4v_n - 3} \\ & \quad v_{n+2} \leq v_{n+1} \end{aligned}$$

   La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, (v_n) est décroissante.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \leq v_n \leq 13$:

Initialisation : $3 \leq v_0 \leq 13$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $3 \leq v_n \leq 13$

→ceci implique-t-il que $3 \leq v_{n+1} \leq 13$?

$$\begin{aligned} 3 \leq v_n \leq 13 &\Leftrightarrow 12 \leq 4v_n \leq 52 \\ &\Leftrightarrow 9 \leq 4v_n - 3 \leq 49 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{9} \leq \sqrt{4v_n - 3} \leq \sqrt{49} \\ &\Leftrightarrow 3 \leq v_{n+1} \leq 7 \leq 13 \end{aligned}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \leq v_n \leq 13$

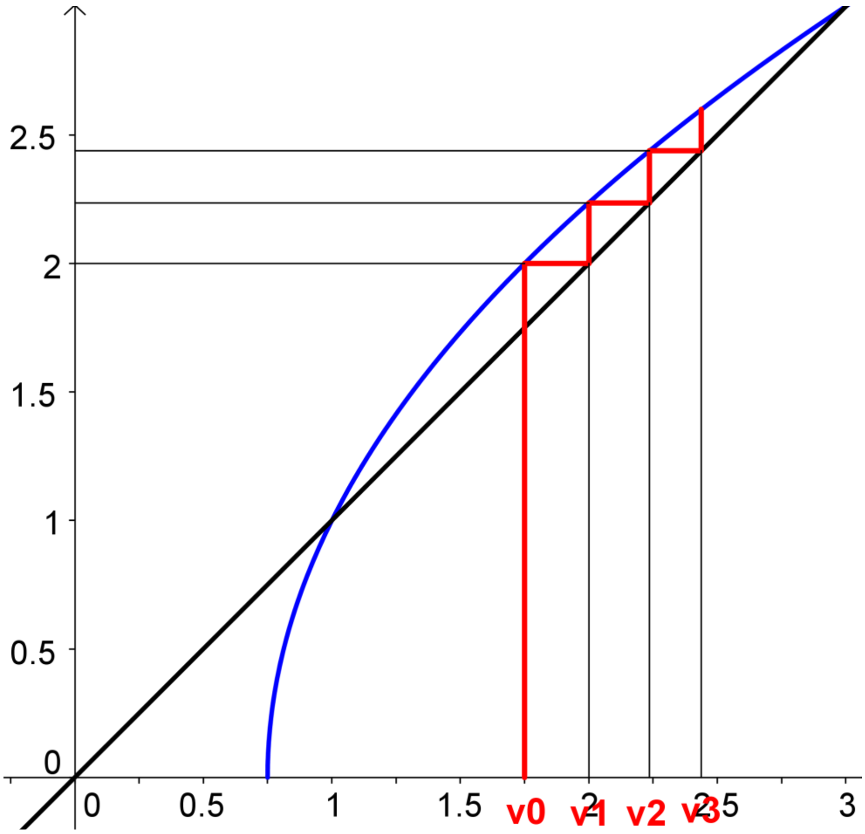
Exercice 12 :

Reprendre les trois questions de l'exercice 11 avec :

Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = \frac{7}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{4v_n - 3}$

1. On admet que la fonction $f :\ x \mapsto 4x - 3$ est croissante sur son ensemble de définition $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$.

   Tracer avec précision la courbe représentative de f , puis, à l'aide de la droite $y = x$, placer les 4 premiers points de la suite.



2. Cette suite (v_n) semble croissante, elle serait donc minorée par son premier terme $v_0 = \frac{7}{4}$ et semble majorée par la valeur 3 qui serait un point de convergence.
3. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ (v_n)$ est croissante :

   Initialisation : $v_1 = \sqrt{4v_0 - 3} = \sqrt{4 \times \frac{7}{4} - 3} = \sqrt{4} = 2$ donc $v_1 \geq v_0$: la propriété est initialisée

   Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n+1} \geq v_n$

→ceci implique-t-il que $v_{n+2} \geq v_{n+1}$?

$$v_{n+1} \geq v_n \quad \Leftrightarrow \quad 4v_{n+1} \geq 4v_n$$
$$\Leftrightarrow \quad 4v_{n+1} - 3 \geq 4v_n - 3$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{4v_{n+1} - 3} \geq \sqrt{4v_n - 3}$$
$$v_{n+2} \geq v_{n+1}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, (v_n) est croissante.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{7}{4} \leq v_n \leq 3$:

Initialisation : $\frac{7}{4} \leq v_0 \leq 3$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{7}{4} \leq v_n \leq 3$

→ceci implique-t-il que $\frac{7}{4} \leq v_{n+1} \leq 3$?

$$\frac{7}{4} \leq v_n \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 7 \leq 4v_n \leq 12$$
$$\Leftrightarrow \quad 4 \leq 4v_n - 3 \leq 9$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{4} \leq \sqrt{4v_n - 3} \leq \sqrt{9}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2 \leq v_{n+1} \leq 7 \leq 3$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{7}{4} \leq v_n \leq 3$

Exercice 13 : Démontrer que : $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$

Initialisation : $\sum_{p=1}^{1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{1\times(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$

→ceci implique-t-il que $\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$?

$$\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$
$$\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$

Exercice 14 : On donne une suite définie par : $u_0 = 13$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

Initialisation : $u_0 = 1 + \frac{12}{5^0} = 1 + 12 = 13$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

→ceci implique-t-il que $u_{n+1} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$?

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{12}{5^n}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{12}{5^{n+1}} + \frac{4}{5} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

Exercice 15 : Montrer par récurrence que $\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Initialisation : $\sum_{p=1}^{1} p(p+1)(p+2) = 1(1+1)(1+2) = 6$

Et $\frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{24}{4} = 6$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

→ceci implique-t-il que $\sum_{p=1}^{n+1} p(p+1)(p+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$?

$$\sum_{p=1}^{n+1} p(p+1)(p+2) = \sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2) + (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\sum_{p=1}^{n+1} p(p+1)(p+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\sum_{p=1}^{n+1} p(p+1)(p+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + \frac{4(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\sum_{p=1}^{n+1} p(p+1)(p+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence,

$$\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Exercice 16 : Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$

Initialisation : $1! = 1$ et $2^{1-1} = 2^0 = 1$ donc $1! \geq 2^{1-1}$ la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n! \geq 2^{n-1}$

→ceci implique-t-il que $(n+1)! \geq 2^n$?

$n! \geq 2^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad n \times n! \geq n \times 2^{n-1}$

Il faut comparer $n \times 2^{n-1}$ et 2^n :

$$n \times 2^{n-1} - 2^n = n \times 2^{n-1} - 2 \times 2^{n-1} = (n-2) \times 2^{n-1}$$

→l'hérédité ne marche qu'à partir du rang 2

→il faut vérifier l'initialisation pour n = 2 : $2! = 2$ et $2^{2-1} = 2$ donc $2! \geq 2^{2-1}$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geq 2^{n-1}$

Exercice 17 : On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n + n + 1$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}$

Initialisation : $\frac{11}{4} \times 3^0 - \frac{3}{4} - \frac{0}{2} = \frac{11}{4} - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2 = v_0$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}$

→ceci implique-t-il que $v_{n+1} = \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{n+1}{2}$?

$$v_{n+1} = 3v_n + n + 1 = 3\left(\frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}\right) + n + 1 = \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{9}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1$$

$$v_{n+1} = \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{9}{4} - \frac{3n}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{4}{4} = \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{5}{4} - \frac{n}{2} = \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{2}{4} - \frac{n}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{n+1}{2}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}$

Exercice 18 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 1$

Après avoir calculé les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur l'expression de (u_n) puis la démontrer par récurrence.

$$u_1 = 5u_0 - 1 = 5 \times \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4} \ , \ u_2 = 5u_1 - 1 = 5 \times \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

La suite (u_n) semble constante.

La propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \frac{1}{4}$

→ceci implique-t-il que $u_{n+1} = \frac{1}{4}$?

$$u_{n+1} = 5u_n - 1 = 5 \times \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, cette suite (u_n) est constante.

Exercice 19 : Montrer par récurrence que, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $a^n-b^n=(a-b)\sum\limits_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^p$

Initialisation : $(a-b)\sum\limits_{p=0}^{1-1}a^{(1-1-p)}b^p=(a-b)\times a^0b^0=(a-b)$

donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $a^n-b^n=(a-b)\sum\limits_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^p$

→ceci implique-t-il que $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum\limits_{p=0}^{n}a^{(n-p)}b^p$?

$$a^{n+1}-b^{n+1}=a\times a^n-b\times b^n=a\times a^n-b\times a^n+b\times a^n-b\times b^n=(a-b)a^n+b\times(a^n-b^n)$$

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)a^n+b\times(a-b)\sum_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^p=(a-b)\left[a^n+b\sum_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^p\right]$$

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\left[a^n\times b^0+\sum_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^{p+1}\right]=(a-b)\left[a^n\times b^0+\sum_{p=1}^{n}a^{(n-p)}b^p\right]$$

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{p=0}^{n}a^{(n-p)}b^p$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$,

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^p$$

NB : autre méthode sans la récurrence : $\sum\limits_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^p=a^{n-1}b^0+a^{n-2}b^1+\ldots+a^0b^{n-1}$

On a :

$$a\times\sum_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^p=a^nb^0+a^{n-1}b^1+\ldots+a^1b^{n-1}$$

$$b\times\sum_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^p=a^{n-1}b^1+a^{n-2}b^2+\ldots+a^0b^n$$

Si on soustrait la deuxième ligne à la première, on obtient :

$$(a-b)\times\sum_{p=0}^{n-1}a^{(n-1-p)}b^p=a^n-b^n\ :\ \text{CQFD}$$

Exercice 20 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2+\dfrac{1}{u_n}$

Montrer par récurrence que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $2\le u_n\le 3$

Initialisation : $u_0=3$ donc $2\le u_0\le 3$: la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que $2\le u_n\le 3$

→ceci implique-t-il que $2\le u_{n+1}\le 3$?

$$2\le u_n\le 3 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\ge\frac{1}{u_n}\ge\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2+\frac{1}{2} \geq 2+\frac{1}{u_n} \geq 2+\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \leq \frac{5}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{7}{3} \leq 3$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_n \leq 3$

Exercice 21 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_2 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n$

Démontrer que, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_2 = u_1 = 1$ et $u_n = (-2)^n - 3(-1)^n$

Initialisation : $u_2 = 1$ et $(-2)^2 - 3(-1)^2 = 4 - 3 = 1$

$u_3 = -3u_2 - 2u_1 = -3 - 2 = -5$ et $(-2)^3 - 3(-1)^3 = -8 + 3 = -5$

donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$ tel que ,

on a : $u_n = (-2)^n - 3(-1)^n$ et $u_{n+1} = (-2)^{n+1} - 3(-1)^{n+1}$

$\rightarrow$ceci implique-t-il que $u_{n+2} = (-2)^{n+2} - 3(-1)^{n+2}$?

$$u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n = -3\left((-2)^{n+1} - 3(-1)^{n+1}\right) - 2\left((-2)^n - 3(-1)^n\right)$$

$$u_{n+2} = -3(-2)^{n+1} + 3\times 3(-1)^{n+1} - 2(-2)^n + 2\times 3(-1)^n$$

$$u_{n+2} = -3(-2)^{n+1} - 2(-2)^n + 3\times 3(-1)^{n+1} + 2\times 3(-1)^n$$

Or $(-1)^n = (-1)^{n+2}$ et $(-1)^{n+1} = -(-1)^{n+2}$

$$u_{n+2} = -3(-2)^{n+1} + (-2)^{n+1} - 3\times 3(-1)^{n+2} + 2\times 3(-1)^{n+2} = -2(-2)^{n+1} - 3(-1)^{n+2}$$

$$u_{n+2} = (-2)^{n+2} - 3(-1)^{n+2}$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_n \leq 3$

Exercice 22 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = u_0 = 1$ et $\forall\, n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

Cette suite est appelée suite de FIBONACCI.

On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: ce nombre est appelé le nombre d'or.

1) $\varphi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \varphi + 1$

2) $\varphi^3 = \varphi \times \varphi^2 = \varphi \times (\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1$

$\varphi^4 = \varphi \times \varphi^3 = \varphi \times (2\varphi + 1) = 2\varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 2 + \varphi = 3\varphi + 2$

$\varphi^5 = \varphi \times \varphi^4 = \varphi \times (3\varphi + 2) = 3\varphi^2 + 2\varphi = 3\varphi + 3 + 2\varphi = 5\varphi + 3$

$\varphi^6 = \varphi \times \varphi^5 = \varphi \times (5\varphi + 3) = 5\varphi^2 + 3\varphi = 5\varphi + 5 + 3\varphi = 8\varphi + 5$

3) φ^n semble s'écrire de la forme : $\varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} = u_{n-1} \times \varphi + u_{n-2}$

4) Démontrer alors cette conjecture avec un entier naturel quelconque *n*.
Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_n \leq 3$

Initialisation : $\varphi^2 = u_1 \times \varphi + u_0$ donc : la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ tel que $\varphi^n = u_{n-1} \times \varphi + u_{n-2}$

→ceci implique-t-il que $\varphi^{n+1} = u_n \times \varphi + u_{n-1}$?

$\varphi^{n+1} = \varphi \times \varphi^n = \varphi \times (u_{n-1} \times \varphi + u_{n-2}) = u_{n-1} \times \varphi^2 + u_{n-2} \times \varphi$

$\varphi^{n+1} = u_{n-1} \times (1 + \varphi) + u_{n-2} \times \varphi = u_{n-1} + u_{n-1}\varphi + u_{n-2} \times \varphi$

$\varphi^{n+1} = (u_{n-1} + u_{n-2}) \times \varphi + u_{n-1} = u_n \times \varphi + u_{n-1}$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \geq 2$, on a : $\varphi^n = u_{n-1} \times \varphi + u_{n-2}$

Exercice 23 : On considère la proposition suivante : P_n : 9 divise $10n + 1$

1) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.
2) Qu'en est-il de P_0, P_1, P_2 et P_3 ? Que semble-t-il légitime de conjecturer ?
3) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, Q_n : 9 divise $10n - 1$
4) A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est fausse.

→corrigé dans le poly de cours

Exercice 24 : Montrer, pour tout entier naturel n, que :

1) $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.

Initialisation : $2^{0+4} + 3^{3\times0+2} = 2^4 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.

→ceci implique-t-il que $2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2} = 2^{n+5} + 3^{3n+5}$ est divisible par 5 ?

$2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2} = 2^{n+5} + 3^{3n+5} = 2 \times 2^{n+4} + 3^3 \times 3^{3n+2}$

$2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2} = 2 \times 2^{n+4} + 2 \times 3^{3n+2} + \left(3^3 - 2\right) \times 3^{3n+2}$

$2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2} = 2 \times \left(2^{n+4} + 3^{3n+2}\right) + 25 \times 3^{3n+2}$

Par hypothèse, la première parenthèse est un multiple de 5, de même pour 25.

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$

2) $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7

Initialisation : $3^{6\times0+2} - 2 = 9 - 2 = 7$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7

→ceci implique-t-il que $3^{6(n+1)+2} - 2$ est divisible par 7 ?

$3^{6(n+1)+2} - 2 = 3^{6n+2} \times 3^6 - 2 = 3^{6n+2} \times 3^6 - 2 \times 3^6 + 2 \times 3^6 - 2 = \left(3^{6n+2} - 2\right) \times 3^6 + 1456$

$3^{6(n+1)+2} - 2 = \left(3^{6n+2} - 2\right) \times 3^6 + 7 \times 208$

Par hypothèse, la première parenthèse est un multiple de 7, de même pour 1456.

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7