Rappels

I. VOCABULAIRE

a. Expérience aléatoire

C'est une expérience (ou épreuve) dont on connaît parfaitement les conditions de déroulement mais dont les résultats dépendent du hasard.

Exemple : Lancer un dé à 6 faces non pipé constitue une expérience aléatoire.

b. Univers

C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. On le note Ω

Exemple : $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

c. Evénement

C'est une partie de l'univers. (Si cette partie ne contient qu' seul élément, on parle d'**événement élémentaire**).

Exemple : A = « J'obtiens un nombre pair » = $\{ 2 ; 4 ; 6 \}$.
$\varnothing$ = événement **impossible**.
$\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ = événement **certain**.

d. Evénements incompatibles

Deux événements n'ayant aucun élément en commun sont dits **incompatibles** (ou **disjoints**).

Exemple : A = « J'obtiens un nombre pair » et B = « J'obtiens un nombre impair » sont incompatibles.

e. Evénement contraire

Si A est un événement, on note $\overline{A}$ l'événement contraire de A formé de tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Exemple : Si $A = \{ 3 \}$ alors $\overline{A} = \{ 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

f. Intersection d'événements : « A et B »

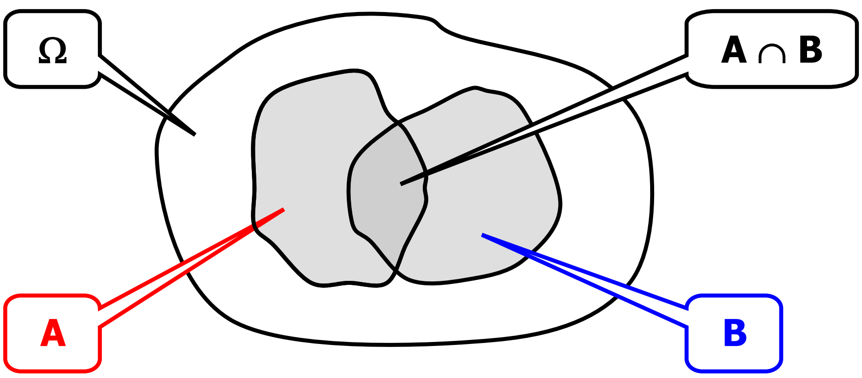
Si A et B sont deux événements, on note $A \cap B$ (« A inter B ») l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à A **et** B.

Exemple : Si $A = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$ et $B = \{ 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ alors $A \cap B = \{ 3 ; 4 \}$.

g. Union d'évenements : « A ou B »

Si A et B sont deux événements, on note $A \cup B$ (« A union B ») l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A **ou** à B (ou aux deux à la fois).

Exemple : Si $A = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$ et $B = \{ 4 ; 5 ; 6 \}$ alors $A \cup B = \{ 2 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.



II. PROBABILITES (RAPPELS)

a. Définition

A chaque événement A on associe un **nombre** appelé **probabilité de A**, noté **P(A)** tel que :

$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$ $\boxed{P(\Omega) = 1}$ $\boxed{P(\varnothing) = 0}$

b. Propriétés

Soit A et B deux événements : $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$ $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Remarque :

Si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \varnothing$, donc $P(A \cap B) = 0$ et donc $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Une formule utile :

$$\boxed{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})}$$

c. Ensembles finis

On ne s'intéresse ici qu'à des expériences ayant un nombre fini de résultats possibles. Donc Ω a aussi un nombre fini d'éléments (et à fortiori tous les événements, qui sont des parties de Ω). On peut donc les compter.

Dans ce cas : « *la probabilité de chaque événement est égal à la somme des probabilités des événements élémentaires qu'il contient* »

d. EQUIPROBABILITE

On dit qu'il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires qui constituent l'univers ont la même probabilité.

Si Ω a n éléments, alors chaque événement élémentaire a donc une probabilité $\frac{1}{n}$

Donc pour tout événement A contenant p événement élémentaires :

$$\boxed{P(A) = \frac{p}{n}}$$

Exemple :

Si $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$, alors $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$.

III. VARIABLE ALEATOIRE

a. Définition :

Lors d'une expérience aléatoire, on appelle variable aléatoire X toute fonction qui associe à un événement élémentaire donné x_i, un nombre réel p_i.

$$X \left| \begin{array}{l} \Omega(\text{évènements}) \to \mathbb{R}(\text{nombres réels}) \\ \qquad\qquad x_i \mapsto p_i \end{array} \right.$$

On note $(X = x_i)$ l'évènement « X prend la valeur x_i ».

b. Loi de probabilité

Si une variable aléatoire X peut prendre différentes valeurs a_i $(1 \le i \le n)$, la loi de probabilité de cette variable aléatoire X permet d'associer à chaque évènement a_i sa probabilité $p_i = p(\mathrm{X} = a_i)$.

On la représente à l'aide d'un tableau :

Valeurs a_i	a_1	a_2	$\dots$	a_n
Probabilité $p(\mathrm{X} = a_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

La somme de ces probabilités élémentaires est égale à 1 :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Exemple : On lance deux pièces et on définit la variable aléatoire X par le nombre de « Face » obtenu.

L'univers Ω = {PP ; PF ; FP ; FF} donc on peut définir des probabilités associées à chaque évènement élémentaire :

$$p(\mathrm{PP}) = p(\mathrm{X}=0) = \frac{1}{4} \quad , \quad p(\mathrm{PF\ ou\ FP}) = p(\mathrm{X}=1) = \frac{1}{2} \quad , \quad p(\mathrm{FF}) = p(\mathrm{X}=2) = \frac{1}{4}$$

La loi de probabilité de X est :

Valeurs de X	0	1	2
Probabilité $p(\mathrm{X} = a_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

IV. ESPERANCE MATHEMATIQUE

Soit X une variable aléatoire qui prend n valeurs a_i $(1 \le i \le n)$

Définition :

On appelle **Espérance mathématique de X** le nombre noté E(X) défini par :

$$E(X) = a_1 \times p(\mathrm{X} = a_1) + a_2 \times p(\mathrm{X} = a_2) + \dots + a_n \times p(\mathrm{X} = a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \times p(\mathrm{X} = a_i)$$

Remarque :

L'espérance mathématique correspond à la valeur moyenne de X dans le cas d'un grand nombre de répétitions.

Si X est le GAIN net (c'est-à-dire GAIN- MISE) alors l'espérance correspond au gain moyen dans ce jeu.
Si cette espérance est nulle, alors on dit que le jeu est équitable.

Exemple : Je joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Pile = je perds 3€. Face = je gagne 2€.
Soit X la variable aléatoire comptabilisant le résultat de chaque lancer : X peut prendre les valeurs –3 et +2.
La loi de probabilité de X est :

Valeurs de X	–3	2
Probabilité $p(\mathrm{X} = a_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

L'espérance de gain est :

$$E(X) = a_1 \times p(\mathrm{X} = a_1) + a_2 \times p(\mathrm{X} = a_2) = -3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$$

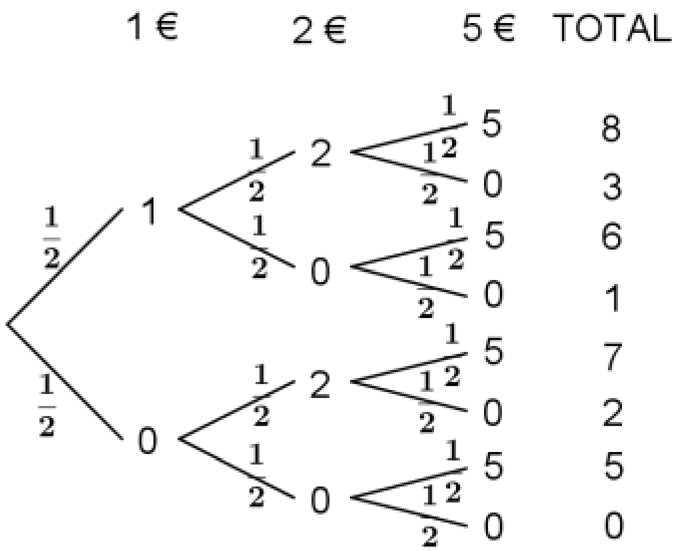
V. REPETITION D'EXPERIENCES – ARBRE PONDERE

Il est commode de représenter une répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré.

Propriété :
La probabilité d'un évènement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités écrites sur chaque branche de ce chemin.

Exemple :
Un enfant lance simultanément trois pièces de monnaie de 1€ , 2€ et 5€.
Il totalise les euros des pièces qui présentent le côté face.
Soit X la variable aléatoire comptant ce total en euros :

1) donner la loi de probabilité de X
2) calculer $p(X \leq 2)$ et $p(X > 6)$
3) calculer l'espérance E(X)



Les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8.

D'où la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	0	1	2	3	5	6	7	8
Probabilité $p(X = a_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

2) $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{3}{8}}$

$p(X > 6) = p(X = 7) + p(X = 8) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

3) $E(X) = \sum_{i=1}^{8} a_i \times p(X = a_i) = 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{1}{8} + 2\times\frac{1}{8} + 3\times\frac{1}{8} + 5\times\frac{1}{8} + 6\times\frac{1}{8} + 7\times\frac{1}{8} + 8\times\frac{1}{8}$

$E(X) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{7}{8} + \frac{8}{8} = \frac{32}{8} = 4$

Si le joueur répète ce jeu un grand nombre de fois, il gagnera en moyenne un total de 4 €.